

Fizyka: Wykład z Fizyki I/Kinematyka relatywistyczna

Szczególna teoria względności

Home

Zdarzenia i czasoprzestrzeń

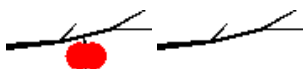
Zdarzenia

Doświadczenie to (**najczęściej**) pomiar jakiejś wielkości fizycznej lub (**rzadziej**) obserwacja jakiegoś zjawiska (**np. zmiany stanu skupienia**).

Oba przypadki możemy sprowadzić do rejestracji różnego typu **zdarzeń**.

Przykład: pomiar przyspieszenia spadającego jabłka możemy sprowadzić do rejestracji dwóch zdarzeń

- Zdarzenie **A**: jabłko odrywa się od gałęzi
- Zdarzenie **B**: jabłko upada na ziemię



Aby wyznaczyć przyspieszenie jabłka (**zakładając, że ruch jest jednostajnie przyspieszony**) musimy znać zarówno **czas** jak i **położenie** jabłka dla obu tych zdarzeń.

W Szczególnej Teorii Względności zdarzeniem nazywamy jednoczesne określenie czasu i położenia. Zdarzenie jest więc każde zjawisko zachodzące w pewnym miejscu w przestrzeni i w pewnej chwili czasu.

Przykłady:

- obserwacja (pomiar) położenia jabłka (**w danej chwili czasu**)
- zderzenie kulek (**zaniedbując ich rozmiary**)
- rozszczepienie jądra atomowego
- start rakiety
- lądowanie rakiety na Księżycu
- wysłanie lub rejestracja impulsu laserowego, cząstki itp.

Zdarzenie = Czas + Położenie

Od pierwszego wykładu zajmowaliśmy się różnego typu zdarzeniami, choć tak tego nie nazywaliśmy. W mechanice klasycznej koncepcja zdarzenia nie jest wykorzystywana, gdyż czas jest pojęciem uniwersalnym. W mechanice relatywistycznej pomiar czasu jest zawsze związany z jakimś punktem w przestrzeni...

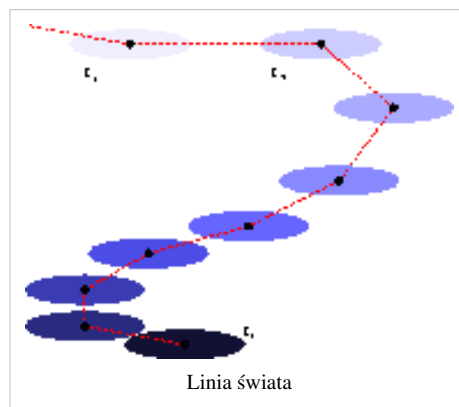
Linia świata

Możemy wyróżnić pewne szczególne **zbiory zdarzeń**. Wyobraźmy sobie, że obserwujemy jakiś obiekt (np. UFO) i rejestrujemy w sposób ciągły zmiany jego położenia w czasie. Mamy ciągłą serię pomiarów czasu i położenia. Zbiór zdarzeń opisujących ruch **konkretnego ciała** nazywamy "**linią świata**" tego ciała.

W wymiarach przestrzennych linia świata to po prostu tor.

Znając linie świata wiemy dokładnie jak poruszało się dane ciało.

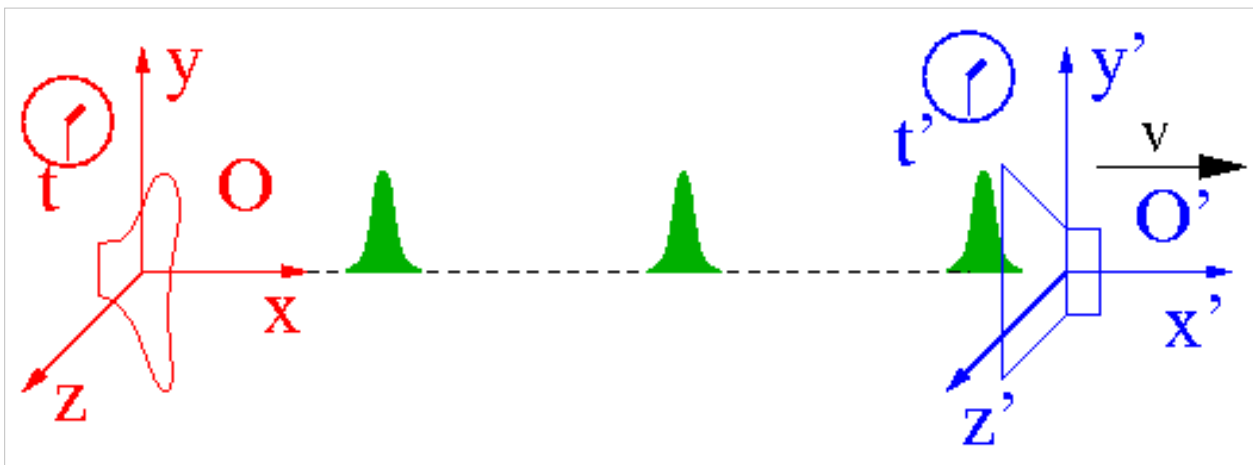
Oczywiście kształt linii świata zależy od wybranego **układu odniesienia**.



Transformacja Galileusza

Transformacja układu współrzędnych

Gdy rozpatrujemy efekt Dopplera zdarzeniem jest zarówno **wysłanie** każdego impulsu, jak i jego **rejestracja**.



Oba typy zdarzeń mogą być zmierzone (czas i położenie) przez obu obserwatorów: O' związanego ze **źródłem** i **rejestrującego** impulsy O . Dla każdego przekazywanego impulsu mamy więc łącznie 4 pomiary (2 zdarzeń).

W **przypadku ogólnym** obserwując **to samo zdarzenie** każdy z obserwatorów może zmierzyć **inne współrzędne**. Jeśli wiemy jak obserwatorzy poruszają się względem siebie, powinniśmy móc wyznaczyć transformacje

$$(t, x, y, z) \Leftrightarrow (t', x', y', z')$$

Uniwersalność czasu

Uniwersalność czasu była **podstawowym założeniem** w fizyce klasycznej (Newtonowskiej). Czas nie zależał od układu odniesienia. Współrzędna czasowa danego zdarzenia była taka sama dla dowolnego obserwatora.

Jeśli układ O' poruszał się z prędkością V w dodatnim kierunku osi X układu O to transformację współrzędnych zdarzeń między tymi układami można zapisać w postaci

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + V t' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

gdzie zakładamy, że w chwili $t = t' = 0$ początki układów pokrywały się.

Powyższa transformacja nazywana jest **Transformacją Galileusza**

Konsekwencją założonej uniwersalności czasu jest jednak **względność prędkości**. **Każda prędkość**, także prędkość światła zmienia się przy zmianie układu odniesienia

$$v = v' + V$$

Transformacja Galileusza zapewnia **niezmienniczość** klasycznych praw ruchu (**zasad dynamiki Newtona**) przy zmianie **układu odniesienia**! Jest zgodna z **zasadą względności**, którą **Galileusz** sformułował w roku 1604:

"Wszystkie układy odniesienia poruszające się względem siebie ze stałą prędkością są równoważne"

Zasada względności nie oznacza wcale, że nie istnieje wyróżniony układ odniesienia. Obserwacje **mikrofalowego promieniowania tła**, pozostałości **Wielkiego Wybuchu**, w którym powstał Wszechświat, pozwalają wskazać związany z nim **układ odniesienia**. Można powiedzieć, że jest to układ własny Wszechświata. Ale prawa fizyki są w nim takie same jak w każdym innym układzie inercyjnym!

Prędkość światła

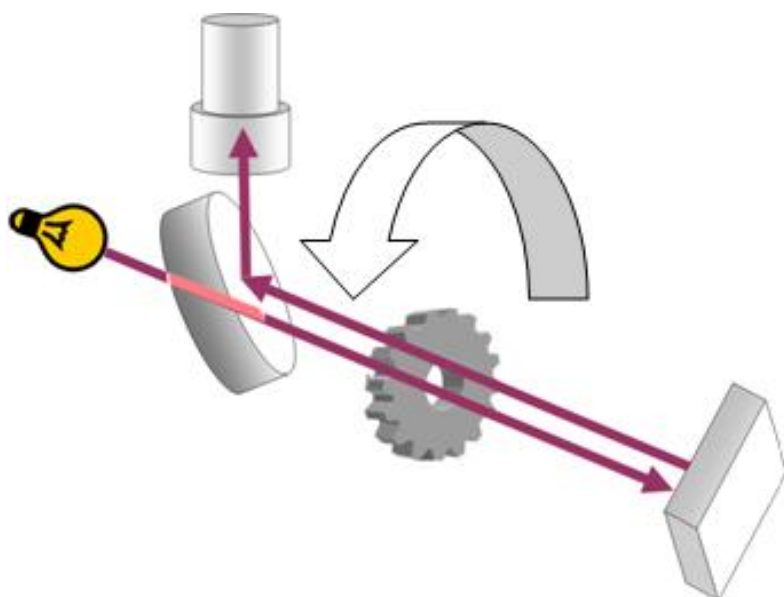
Historia pomiarów

Już **Galileusz** zastanawiał się nad prędkością rozchodzenia się światła. Jako pierwszy zaproponował pomiar prędkości światła metodą **czasu przelotu**. Jednak przy ówczesnych dokładnościach pomiarów ($\Delta L \sim 1 \text{ m}$, $\Delta t \sim 1 \text{ s}$) było to niewykonalne. **Nie w warunkach ziemskich...**

W **1676 Ole Rømer** zauważył, że obserwowany na Ziemi czas **zaćmień satelity Io** Jowisza zależy od położenia Ziemi względem Jowisza. Maksymalne opóźnienie czasu zaćmienia wynosi około **16 minut**. Rømer przyjął (słusznie), że opóźnienie to wynika ze zmiany odległości Ziemi od Jowisza o długość średnicy orbity Ziemi. Według ówczesnych pomiarów tej orbity oszacował $c = 214000 \text{ km/s}$

W **1727 William Bradley** wyznaczył prędkość światła z **aberracji gwiazd**. Gwiazdy zmieniają w ciągu roku swoje położenie na sferze niebieskiej o ok. 20.5 sekundy łuku, co jest wywołane przez ruch Ziemi dookoła Słońca (**przy skończonej prędkości rozchodzenia się światła**). Na tej podstawie wyznaczył $c = 301000 \text{ km/s}$

Pierwszy pomiar w warunkach "laboratoryjnych" (ziemskich) został przeprowadzony przez H.L.Fizeau w roku **1849**.



Światło było wysyłane na odległość $L = 8633$ m i wracało do obserwatora po odbiciu w zwierciadle. Na początku i na końcu drogi promień przechodził przez przerwę między zębami obracającej się przesłony. Odbity promień przestawał docierać do obserwatora, gdy liczba obrotów przesłony o $N = 720$ zębach wynosiła $n = 12.86 \text{ s}^{-1}$. Na tej podstawie Fizeau oszacował prędkość światła na

$$c \approx 315300 \text{ km/s}$$

W kolejnych latach L.Foucault udoskonalił tą metodę używając wirującego zwierciadła zamiast koła zębatego. Bardzo dokładne pomiary nową metodą przeprowadził A.Michelson w latach 1924-26. Na odległości $L = 35 \text{ km} \pm 3 \text{ mm}$ (!) między Mt.Wilson i Mt.San Antonio otrzymał wynik

$$c = 299\,796 \pm 4 \text{ km/s}$$

W latach 70 XX wieku prędkość światła zmierzono z dokładnością do około 1 m/s !

Mierzono też prędkości rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w **innych zakresach częstości** (od fal radiowych, $\nu \sim 10^7 \text{ Hz}$, do promieniowania γ , $\nu \sim 10^{24} \text{ Hz}$). **Nie zaobserwowano żadnych różnic w prędkościach rozchodzenia się fal, w granicach błędów pomiarowych.**

Dziś już nie mierzymy prędkości światła !

W 1983 roku prędkość światła została **zdefiniowana** jako

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \text{ (dokładnie !)}$$

wybrana wartość zgodna jest z wcześniejszymi pomiarami. Teraz **1 metr** jest zdefiniowany jako odległość jaką pokonuje **światło w próżni** w czasie równym $1/299\,792\,458$ sekundy.

Równania Maxwella

Na początku XX wieku panowało powszechne przekonanie o **falowej** naturze światła, która przejawiała się m.in. w zjawiskach dyfrakcji i interferencji. Rozchodzenie się światła jako fali elektromagnetycznej opisywały **Równania Maxwella** (1865):

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Z równań tych wynikało, że prędkość rozchodzenia się fali elektromagnetycznej wynosi:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Jednak równania Maxwella nie są niezmiennicze względem **transformacji Galileusza**. W szczególności wynika z nich, że prędkość światła zależy jedynie od **stałych** opisujących oddziaływania **magnetyczne** i **elektryczne** (**prawo Ampera** i **prawo Coulomba**), a więc jej wartość **nie zależy od układu odniesienia**! W każdym układzie powinna być taka sama!?

Z transformacji Galileusza wynika, że powinna zależeć od układu odniesienia!

Eter

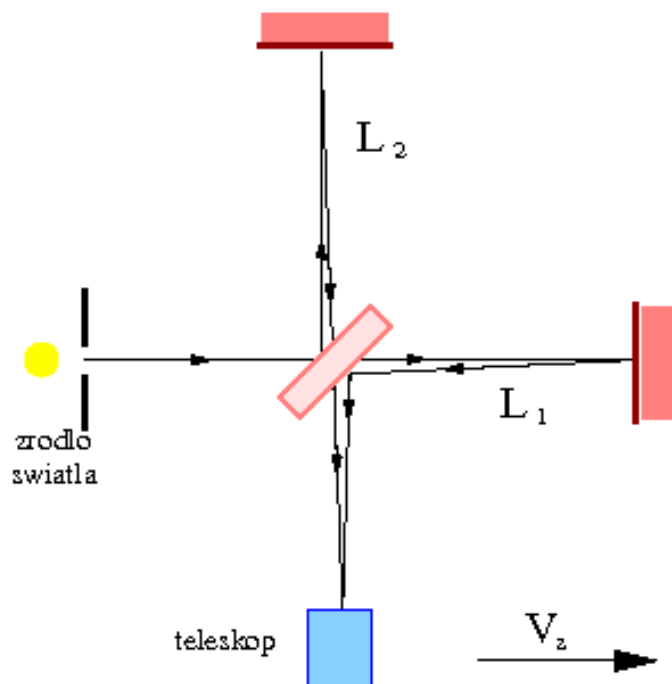
Ale ten sam problem możemy dostrzec w przypadku rozchodzenia się **dźwięku**. Prędkość rozchodzenia się dźwięku wyraża się przez **parametry ośrodka**(!). Z definicji jest więc ustalona tylko **względem ośrodka** (**w układzie w którym ośrodek spoczywa**). Dzięki temu **nie ma sprzeczności** opisu propagacji fal dźwiękowych z transformacją Galileusza i jego prawem "dodawania" prędkości.

Podobnie mogłoby być w przypadku światła: jeśli jesteśmy w stanie wskazać **ośrodek** w którym światło się rozchodzi, to **równania Maxwella** nie są sprzeczne z transformacją Galileusza.

Poszukiwany ośrodek nazwano eterem...

Doświadczenie Michelsona-Morleya (1887)

Jednym z doświadczeń, które miało zmierzyć prędkości Ziemi względem eteru było doświadczenie Michelsona-Morleya. W doświadczeniu tym wykorzystywano interferometr, który pozwalał na pomiar zmian w różnicy czasu przelotu światła w dwóch prostopadłych ramionach interferometru.



Jeśli przyjmiemy, że ramię L_1 interferometru skierowane jest zgodnie z kierunkiem ruchu Ziemi względem eteru a ramię L_2 prostopadle to czas przelotu światła w ramionach interferometru wyniesie

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= \frac{L_1}{c + v_Z} + \frac{L_1}{c - v_Z} \\ &= \frac{2L_1}{c} \cdot \frac{1}{1 - \beta^2} \\ \Delta t_2 &= \frac{2L_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\end{aligned}$$

gdzie $\beta = \frac{v}{c}$.

Czas propagacji zależy od kierunku ruchu względem eteru!

Światło z dwóch ramion interferometru interferuje ze sobą. Zmiana różnicy czasu przelotu związana ze zmianą kierunku ruchu względem eteru powodowałaby mierzalne przesunięcia prążków interferencyjnych. Zmianę taką, zakładając że Ziemia porusza się względem eteru, można uzyskać obracając interferometr. Jednak mimo wielokrotnie powtarzanych pomiarów (o różnych porach dnia i różnych porach roku) wynik był zawsze negatywny (brak efektu)!

Wyniki

Negatywny wynik doświadczenia Michelsona-Morleya wskazywał, że Ziemia **nie porusza się** względem **ośrodka**, w którym rozchodzi się **światło**.

Doświadczenia tego typu powtarzano **wielokrotnie**, także w dłuższych okresach (aby wykorzystać zmianę kierunku prędkości Ziemi w **ruchu orbitalnym**) zawsze z **wynikiem negatywnym**.

Wszystkie wyniki wskazywały, że **prędkość światła** jest stała (**względem źródła**) i **nie zależy od układu odniesienia**.

W świetle tych wyników **równania Maxwella** nie dawały się pogodzić z **transformacją Galileusza** (**postulatem uniwersalności czasu**).

Teoria względności Einsteina

Postulaty Einsteina

W roku 1905 **Einstein** opublikował pracę "**O elektrodynamice ciał w ruchu**". Zawarł w niej **dwa postulaty**, które *"wystarczają do podania prostej, wolnej od sprzeczności elektrodynamiki ciał w ruchu, opartej na teorii Maxwella..."*. Te postulaty to:

- prawa fizyki są identyczne w układach będących względem siebie w ruchu jednostajnym prostoliniowym (**zasada względności Galileusza**)
- prędkość światła w próżni, c , jest jednakowa w każdym kierunku we wszystkich inercjalnych układach odniesienia, niezależnie od wzajemnego ruchu obserwatora i źródła (**uniwersalność prędkości światła**)

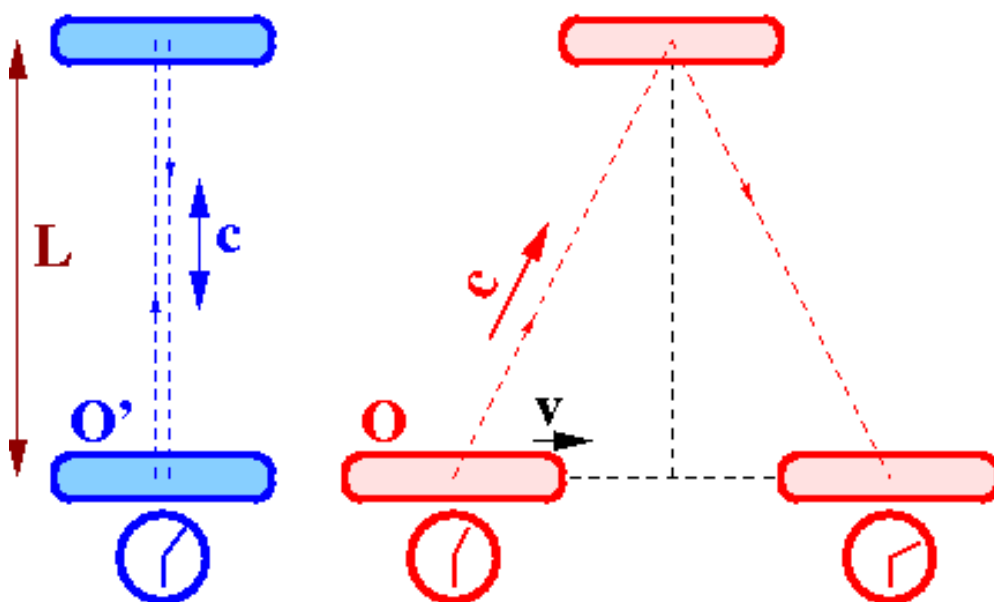
Drugi postulat oznacza **odrzuć transformację Galileusza** na rzecz **równań Maxwella**.

Okazuje się, że transformacja Galileusza nie jest jedyną transformacją, która zgodna jest z **zasadą względności**. Jeśli odrzucimy postulat uniwersalności czasu istnieje drugie rozwiązanie, którym jest **transformacja Lorentza**.

Względność czasu

Uniwersalność prędkości światła nie da się pogodzić z uniwersalnością czasu !

Rozważmy obserwatora O' , który porusza się z prędkością v względem układu O



Obserwator O' odmierza czas przy pomocy **zegara świetlnego**. Takt zegara odpowiada przejściu błysku światła między dwoma zwierciadłami odległymi o l . Dla obserwatora O' takt ten wynosi

$$\Delta t' = \frac{2l}{c}$$

Dla obserwatora **O** światło pokonuje dłuższą drogę. Jego zdaniem takt zegara wyniesie

$$\Delta t = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

Okazuje się więc, że dla obserwatora **O** zegar w **O'** chodzi wolniej!

Nazywamy to dylatacją czasu:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

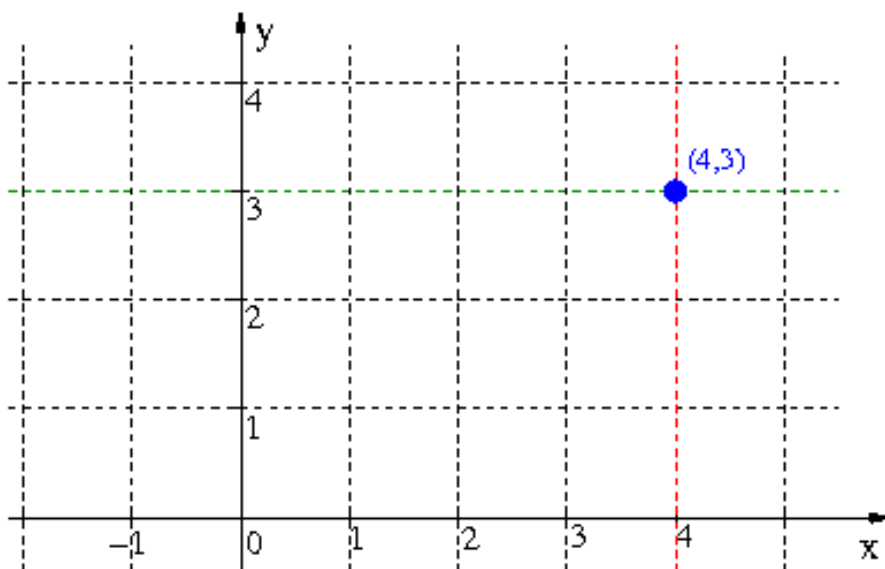
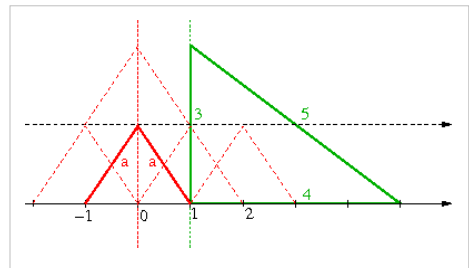
Konstrukcja układu współrzędnych

Z naszych rozważań wynika, że czas w jednym układzie biegnie wolniej niż w drugim. Ale przecież żaden układ nie powinien być wyróżniony !? Musimy bliżej zastanowić się nad **konstrukcją układu współrzędnych**.

Dla **współrzędnych przestrzennych** jest to proste: wystarczy, że mamy **wzorzec** jednostki długości, odkładając ten wzorzec wzdłuż **toru ciała swobodnego** (lini prostej) otrzymujemy pierwszą oś współrzędnych.

Kolejne osie układu konstruujemy prostopadłe do pierwszej. Nie potrzebujemy kątomierza. Wystarczą nam **jednakowej długości** tyczki lub sznurki, które pozwolą nam na konstrukcję trójkąta równoramiennego. Możemy też skorzystać z **twierdzenia Pitagorasa**...

Dodatkowo kreśląc **linie równoległe** do osi przechodzących przez początek układu otrzymujemy **siatkę współrzędnych**. Pozycję zdarzenia możemy zawsze zdefiniować poprzez podanie najbliższego węzła siatki.



Pozostaje nam do wybrania **"oś czasu"**.

Czy wystarczy nam jeden zegar w początku układu współrzędnych?

Nie !

Potrzebny jest nam **zegar referencyjny** w początku układu współrzędnych, ale do określenia współrzędnej czasowej zdarzenia potrzebny jest zegar **w każdym węźle siatki**. Inaczej pomiar będzie zależał od metody odczytu wskazań

zegara referencyjnego.

Zegary siatki muszą być oczywiście **zsynchronizowane** z zegarem referencyjnym. Nie można (jak się później przekonamy) zrobić tego synchronizując zegary w początku układu, a następnie roznosząc je do poszczególnych węzłów siatki - **ruch może wpływać na bieg zegarów** (wyobraźmy sobie, że mamy zegary wahadłowe).

Synchronizacja zegarów

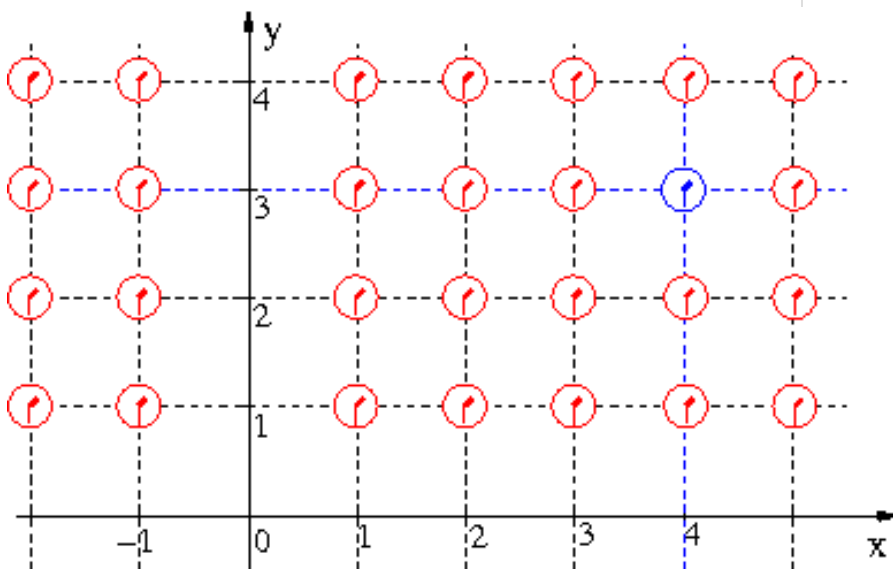
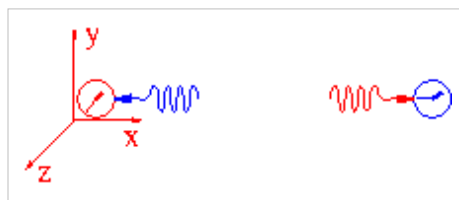
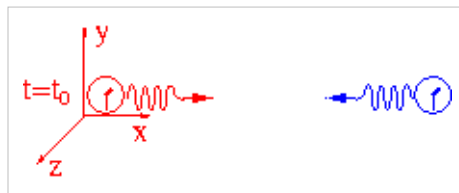
Synchronizację można przeprowadzić poprzez wysłanie **impulsów światła**. Przyjmijmy, że o określonej godzinie wysyłamy impuls z wybranego zegara do zegara referencyjnego oraz z zegara referencyjnego do wybranego zegara.

Jeśli oba impulsy dotarły o tej samej godzinie (odczytanej na zegarze do którego dotarł impuls) to oznacza, że zegary są zsynchronizowane. Jeśli nie to połowa różnicy tych czasów daje nam poprawkę dla wybranego zegara.

Aby zastosować tą metodę synchronizacji nie musimy znać prędkości światła. Zakładamy tylko, że nie zależy ona od kierunku rozchodzenia!

Wszystkie zegary rozmieszczone w węzłach skonstruowanej przez nas siatki układu współrzędnych spoczywają w tym układzie.

Można więc powiedzieć, że układ inercjalny to rodzina swobodnych (zsynchronizowanych) zegarów.



Dylatacja czasu



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Powróćmy do rozważanego wcześniej pomiaru czasu przy pomocy zegara świetlnego. Dla obserwatora O zegar w początku układu O' chodzi wolniej (niż jego zegar).

Ale układy powinny być równoważne !?

Pozorny paradoks wynika z faktu, że pomiar narusza symetrię między układami: obserwujemy zegar, który jest związany z konkretnym układem odniesienia.

Obserwator O powie, że w układzie O' :

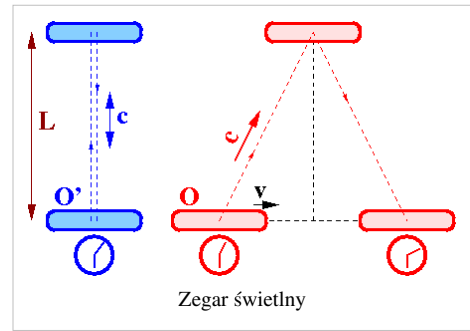
- zegary nie są poprawnie zsynchronizowane
- wszystkie zegary chodzą wolniej niż powinny

Ale tak samo obserwator O' powie, że w układzie O :

- zegary nie są poprawnie zsynchronizowane
- wszystkie zegary chodzą wolniej niż powinny

Synchronizacja zegarów zależy od układu odniesienia.

Czy jesteśmy w stanie powiązać pomiary czasu i położenia w obu układach? Tak jak to robiliśmy w przypadku klasycznym (transformacja Galileusza)...



Transformacja Lorentza

Transformacja liniowa

Aby zachować niezmienniczość praw przyrody względem przesunięć w czasie i przestrzeni, transformacja współrzędnych między układami powinna mieć postać

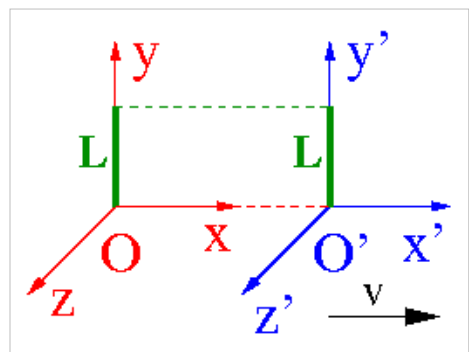
$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = L \cdot \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

gdzie L jest nieznaną macierzą współczynników transformacji (4×4)

Wymiary poprzeczne

Zkładamy, że układ O' porusza się z prędkością V w dodatnim kierunku osi X układu O .

Rozważmy jednostkowe pręty umieszczone w obu układach wzdłuż osi Y (lub Z). Z symetrii zagadnienia, żaden obserwator nie może stwierdzić, że jego pręt jest dłuższy. Wnioskujemy z tego, że współrzędne zdarzeń prostopadłe do kierunku ruchu muszą się zachowywać:



$$y = y'$$

$$z = z'$$

Szukamy więc transformacji w ogólnej postaci:

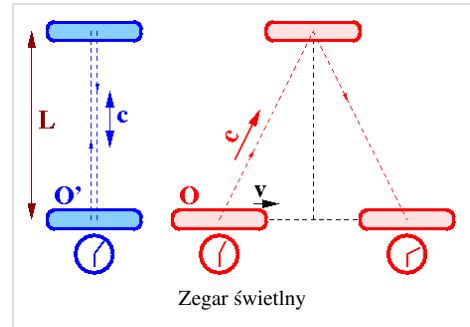
$$\begin{aligned}t &= A t' + B x' \\x &= C t' + D x' \\y &= y' \quad z = z'\end{aligned}$$

Dylatacja czasu

Przyjmijmy, że w obu układach pierwsze "tyknięcie" zegara świetlnego ma współrzędne $(0, 0, 0, 0)$.

Niech drugie "tyknięcie" w układzie O' ma współrzędne $(t', 0, 0, 0)$ (zegar spoczywa w początku układu).

W układzie O , rozważając bieg promienia świetlnego w zegarze dostaliśmy



$$t = \gamma \cdot t'$$

gdzie wprowadziliśmy tzw. współczynnik Lorentza

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

natomiast dla współrzędnej przestrzennej drugiego "tyknięcie"

$$x = \beta \cdot ct = \beta \gamma \cdot ct'$$

gdzie $\beta = \frac{v}{c}$

Porównując otrzymane zależności z ogólną postacią transformacji otrzymujemy

$$\begin{aligned}A &= \gamma \\C &= \beta \gamma c\end{aligned}$$

Predkość światła

Przyjmijmy, że w chwili mijania się obserwatorów $t = t' = 0$ z początku układów emitowane są dwa impulsy światła, zgodnie i przeciwnie do $\vec{v}$. Dla obu obserwatorów rozchodzą się one z prędkością c .

Dla pierwszego impulsu mamy

$$\begin{aligned}x' &= ct' \\x &= ct\end{aligned}$$

Dla drugiego impulsu

$$\begin{aligned}x' &= -ct' \\x &= -ct\end{aligned}$$

Podstawiając założoną postać transformacji do równania opisującego rozchodzenie się impulsów w układzie O otrzymujemy (odpowiednio dla pierwszego i drugiego impulsu):

$$\begin{aligned}Ct' + D(ct') &= c \cdot [At' + B(ct')] \\Ct' - D(ct') &= -c \cdot [At' - B(ct')]\end{aligned}$$

Dodając i odejmując stronami otrzymujemy:

$$B = \frac{1}{c^2} C = \frac{1}{c} \beta \gamma$$

$$D = A = \gamma$$

Transformacja Lorentza

Ostatecznie otrzymujemy transformację w postaci:

$$ct = \gamma ct' + \gamma \beta x'$$

$$x = \gamma \beta ct' + \gamma x'$$

$$y = y'$$

$$z = z'$$

Lub, w zapisie macierzowym:

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct' + \gamma \beta x' \\ \gamma \beta ct' + \gamma x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

ct traktujemy jako "czwarty" wymiar (zazwyczaj zapisujemy jako wymiar "zerowy" - x_0).

Transformację Lorentza można więc traktować jako pseudo-obrót w "płaszczyźnie" $ct - x$ (dla ruchu wzdłuż osi X).



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Źródła i autorzy artykułu

Fizyka: Wykład z Fizyki I/Kinematyka relatywistyczna Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?oldid=12588> Autorzy: Alfizar

Źródła, licencje i autorzy grafik

image:jablko.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Jablko.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:jablko2.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Jablko2.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:ufo.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Ufo.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:doppler_5.png Źródło: https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Doppler_5.png Licencja: nieznany Autorzy: -
image:Fizeau.jpg Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Fizeau.jpg> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:MM_4.png Źródło: https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:MM_4.png Licencja: nieznany Autorzy: -
image:zegar.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Zegar.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:osie.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Osie.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:siatka.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Siatka.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:synchro.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Synchro.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:synchro2.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Synchro2.png> Licencja: nieznany Autorzy: -
image:rel_space.png Źródło: https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Rel_space.png Licencja: nieznany Autorzy: -
image:transverse.png Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?title=Plik:Transverse.png> Licencja: nieznany Autorzy: -

Licencja

Attribution-Share Alike 3.0 PL
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/pl>



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

